

FÍSICA
INFORMÁTICA DE GESTIÓN
 SEPTIEMBRE DE 2004
SOLUCIONES

PROBLEMA 1.3.1

Dado el sistema de cargas $q_1 = -q$, $q_2 = 2q$ y $q_3 = -q$, situadas respectivamente en los puntos $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$ y $(0, -1, 0)$, calcular el campo y potencial en el punto P $(0, 1, 0)$ (véase la figura P1.3.1). Obtener el trabajo que se debe realizar para trasladar una carga $Q = 4q$ desde el infinito hasta el punto P. Dicho trabajo ¿lo realizan fuerzas internas o externas al sistema de cargas?

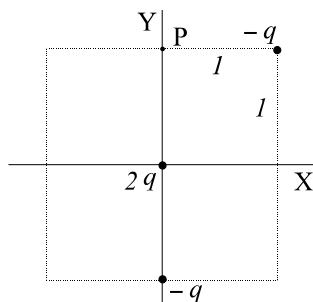


Figura P1.3.1

Solución

1)

Calculamos en primer lugar el campo eléctrico.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_1^3 \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Los vectores de posición respectivos son:

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r}_2 = 0 ; \quad \mathbf{r}_3 = -\mathbf{u}_y$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 &= -\mathbf{u}_x ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = \mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_3 = 2\mathbf{u}_y \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = 1 ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = 2 \end{aligned}$$

Con estos valores y los correspondientes a las respectivas cargas tenemos que,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{-q(-\mathbf{u}_x)}{1^3} + \frac{2q\mathbf{u}_y}{1^3} + \frac{-q2\mathbf{u}_y}{2^3} \right) \quad \text{V/m}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(\mathbf{u}_x + \frac{7}{4}\mathbf{u}_y \right)$$

2)

El potencial electrostático en P será:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_1^3 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Tomando los valores correspondientes de q_i y los vectores de posición calculados en el apartado anterior queda,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{-q}{1} + \frac{2q}{1} - \frac{q}{2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{2} \quad \text{V}$$

3)

El trabajo para traer la carga Q hasta el punto P es:

$$W = QV(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} 4q \frac{q}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} 2q^2$$

Trabajo positivo realizado por fuerzas externas al campo electrostático creado por el sistema de cargas propuesto.

PROBLEMA 1.3.2

Dado el circuito que muestra la figura P1.3.2, calcular la corriente que circula por cada una de las pilas. Indicar, de forma razonada para cada pila, si suministra o recibe energía.

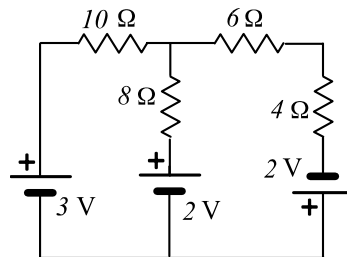


Figura P1.3.2

Solución

Calculamos las corrientes aplicando el método de mallas con las corrientes en los dos lazos en sentido horario.

Las ecuaciones de malla son:

$$\begin{aligned} 3 - 2 &= 18I_1 - 8I_2 & 1 &= 18I_1 - 8I_2 \\ 2 + 2 &= -8I_1 + 18I_2 & 4 &= -8I_1 + 18I_2 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema por el método de Cramer.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 18 & -8 \\ -8 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{50}{260} = \frac{5}{26}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}}{260} = \frac{80}{260} = \frac{8}{26}$$

La corriente en la rama común es:

$$I_c = I_2 - I_1 = \frac{8}{26} - \frac{5}{26} = \frac{3}{26}$$

Esta corriente tiene el sentido de I_2 , es decir, va del polo negativo al positivo de la pila situada en la rama compartida.

Dado el sentido de las corrientes que atraviesan las tres pilas, que en todas va del polo negativo al positivo, toda suministran energía.

PROBLEMA 1.3.3

En el circuito indicado en la figura P1.3.3a se utiliza un diodo cuya curva $V - I$ se muestra en la figura P1.3.3b. 1) Calcular el punto de funcionamiento cuando el conmutador S está en la posición 1 y en la 2. 2) Obtener la potencia disipada en el diodo cuando el conmutador S está en la posición 2, teniendo en cuenta el punto de funcionamiento.

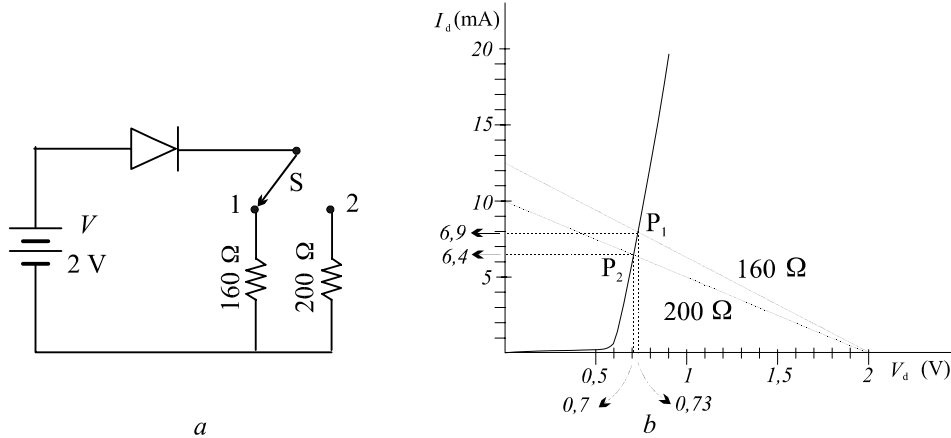


Figura P1.3.3

Solución

La ecuación de la recta de carga en el diagrama $V - I$ viene dada por la relación (13.3)

$$E_o = RI_d + V_d$$

En el problema propuesto $E_o = 2 \text{ V}$, por tanto la recta de carga es,

$$V_d = 2 - RI_d$$

1)

Caso en el que $R = 160 \Omega$.

Los puntos de corte con los ejes se obtienen de la forma siguiente:

$$\text{Para } I_d = 0 \rightarrow V_d = 2$$

$$\text{Para } V_d = 0 \rightarrow I_d = \frac{2}{160} = 12,5 \text{ mA}$$

En la figura P1.3.3b se muestra la recta que une los dos puntos de corte sobre los ejes calculados. El punto de intersección con la curva del diodo es el punto P_1 , cuyas coordenadas son:

$$P_1 = (0,73 \text{ V}, 6,9 \text{ mA})$$

2)

Caso en el que $R = 200 \Omega$

Los puntos de corte con los ejes se obtienen de la forma similar al caso anterior:

$$\text{Para } I_d = 0 \rightarrow V_d = 2$$

$$\text{Para } V_d = 0 \rightarrow I_d = \frac{2}{200} = 10 \text{ mA}$$

En la figura P1.3.3b se muestra la recta que une los dos puntos de corte sobre los ejes calculados. El punto de intersección con la curva del diodo es el punto P_2 , cuyas coordenadas son:

$$P_2 = (0,7 \text{ V}, 6,4 \text{ mA})$$

2.1)

La potencia disipada en el diodo es igual a la potencia suministrada por la pila de 2 voltios menos la disipada en la resistencia de 200Ω . La corriente que suministra la pila en el punto P_2 es $I_d = 6,4 \text{ mA}$.

$$P_d = 2 \times I_d - R \times I_d^2$$

$$P_d = 2 \times 6,4 \times 10^{-3} - 200 \times (6,4 \times 10^{-3})^2$$

$$P_d = 4,608 \times 10^{-3} \simeq 4,61 \text{ mW}$$

RESERVA

PROBLEMA 1.4.1

En el circuito de la figura P1.4.1 se muestra una pila V conectada a los condensadores C_1 , C_2 y C_3 (C_3 está unido a C_2 y al polo negativo de la pila). Inicialmente $C_1 = C_2 = C_3$. En un instante dado se introduce un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = 3\varepsilon_0$ entre las placas del condensador C_3 , llenando todo el espacio entre placas.

Calcular la energía almacenada en los condensadores antes y después de introducir el dieléctrico en C_3 . La pila permanece siempre unida a los dos condensadores.

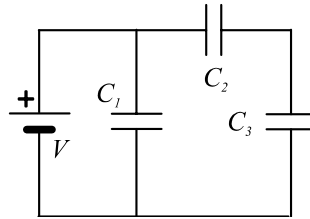


Figura P1.4.1

Solución

1)

Calculamos la energía de cada condensador aplicando la relación:

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

Tenemos que calcular la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador para obtener la energía almacenada.

La tensión aplicada por la batería es V , por tanto, la tensión entre las placas del condensador C_1 es:

$$V_1 = V$$

Los condensadores C_2 y C_3 están en serie por lo que,

$$V = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$

Dado que en el primer caso $C_2 = C_3 = C_1 = C$ y que en dos condensadores en serie sus cargas son iguales, $Q_2 = Q_3$,

$$V = \frac{Q_2}{C} + \frac{Q_2}{C} \rightarrow Q_2 = \frac{1}{2}CV$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C} = \frac{1}{2}V ; \quad V_3 = \frac{Q_2}{C} = \frac{1}{2}V$$

Teniendo en cuenta los cálculos realizados,

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}Q_2V_2 + \frac{1}{2}Q_2V_3$$

Sustituyendo los valores obtenidos para Q_2 , V_1 , V_2 y V_3 ,

$$W_1 = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}CV\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}\frac{1}{2}CV\frac{1}{2}V$$

operando tenemos que,

$$W_1 = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{4}CV^2 = \frac{3}{4}CV^2$$

2)

Al introducir un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = 3\varepsilon_0$ entre las placas del condensador C_3 , variamos su capacidad, que será $C'_3 = 3C_3 = 3C$.

Con la nueva capacidad repetimos los cálculos del apartado anterior. En el condensador C_1 no varia ni la carga ni la tensión aplicada. Para los condensadores C_2 y C'_3 tendremos que,

$$V = \frac{Q'_2}{C_2} + \frac{Q'_3}{C'_3}$$

Por estar en serie $Q'_2 = Q'_3$; $C_2 = C$ y $C'_3 = 3C$. De donde se deduce que,

$$V = \frac{Q'_2}{C} + \frac{Q'_2}{3C} \rightarrow Q'_2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) = CV$$

$$Q'_2 = \frac{3}{4}CV$$

$$V'_2 = \frac{Q'_2}{C_2} = \frac{3}{4}V ; \quad V'_3 = \frac{Q'_3}{3C} = \frac{1}{4}V$$

La energía del sistema ahora será,

$$W_2 = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}Q'_2V'_2 + \frac{1}{2}Q'_2V'_3$$

Sustituyendo los valores de Q'_2 ; V'_2 y V'_3 tenemos,

$$W_2 = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}CV\frac{3}{4}V + \frac{1}{2}\frac{3}{4}CV\frac{1}{4}V$$

$$W_2 = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}CV^2 \left(\frac{9}{16} + \frac{3}{16}\right) = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}CV^2$$

$$W_2 = \frac{7}{8}CV^2$$

La diferencia de energía entre los dos casos es:

$$W' = W_2 - W_1 = \frac{7}{8}CV^2 - \frac{3}{4}CV^2 = \frac{1}{8}CV^2$$

Este cambio de energía lo aporta la batería que permanece unida a los condensadores durante el proceso.

PROBLEMA 1.4.2

Dado el sistema de conductores indicado en la figura P1.4.2, por los que circula una corriente I , calcular el campo magnético en el origen de coordenadas O.

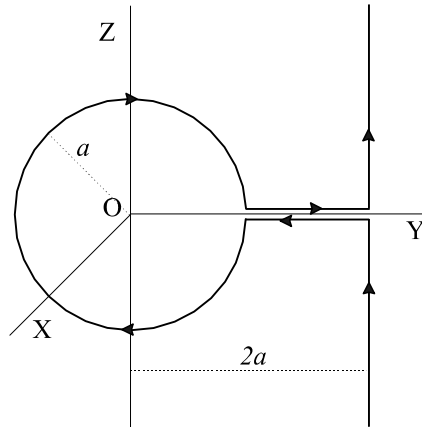


Figura P1.4.2

Solución

El circuito está formado por un tramo circular con centro en el origen de coordenadas, dos tramos rectos paralelos al eje Y, además de otros dos tramos rectilíneos, paralelos al eje Z y situados a una distancia $2a$.

Los tramos rectos paralelos al eje Y no crean campo magnético en el punto O, ya que la corriente tiene sentido opuesto, además de que $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{l}' = 0$, dado que $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \parallel d\mathbf{l}'$.

En los tramos rectos paralelos al eje Z la corriente tiene el mismo sentido, por tanto la suma de ambos se comporta como un hilo rectilíneo e indefinido en la dirección del eje Z.

Tramo en forma de circunferencia de centro en el origen. Considerando el resultado del ejercicio 6.2, ecuación (6.15), página 223 del libro de *Física para Informática* (V López y MM Montoya), y teniendo en cuenta el sentido horario de la corriente,

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_o I}{2a} \mathbf{u}_x$$

El tramo rectilíneo, aplicando el resultado del ejercicio 6.1, ecuación (6.13), y teniendo en cuenta el sentido de la corriente,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi 2a} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \mathbf{u}_x$$

El campo total será:

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I}{2a} \left(\frac{1}{2\pi} - 1 \right) \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{B}_T = -\frac{\mu_o I}{2a} \left(\frac{2\pi - 1}{2\pi} \right) \mathbf{u}_x$$

PROBLEMA 1.4.3

En la figura P1.4.3 se muestra un circuito de corriente alterna (c. a.). Calcular el módulo y la fase de la corriente que suministra el generador V .

$V = 10\angle 0^\circ$ V; $\omega = 10^6$ s⁻¹; $L = 15$ μ H = 15×10^{-6} H; $C = 0,1$ μ F = 10^{-7} F.

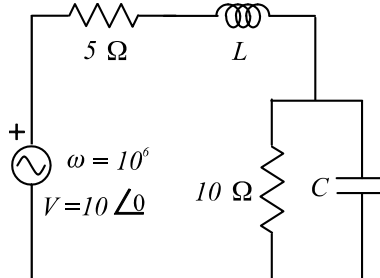


Figura P1.4.3

Solución

En primer lugar calculamos las reactancias inductiva y capacitiva.

$$X_L = \omega L = 10^6 \times 15 \times 10^{-6} = 15 ; \quad X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^6 \times 10^{-7}} = -10$$

Para calcular la corriente que suministra el generador, debemos en primer lugar sumar las impedancias que componen el circuito.

$$\mathbf{Z}_1 = 5 + j15$$

La impedancia \mathbf{Z}_2 es el resultado de calcular la impedancia equivalente a la resistencia de 10Ω en paralelo con el condensador C , cuya $X_c = -10$.

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{-j10} = \frac{10 - j10}{-j100}$$

$$\mathbf{Z}_2 = -\frac{j100}{10 - j10} = \frac{j10}{1 - j} = j\frac{10}{2}(1 + j) = 5(-1 + j)$$

La impedancia total es:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 5 + j15 + 5(-1 + j) = j20$$

La corriente que suministra el generador será:

$$\mathbf{I} = \frac{V}{\mathbf{Z}_T} = \frac{10}{j20} = -j\frac{1}{2} = -j0,5$$

$$I = 0,5 \text{ A} \quad ; \quad \tan \theta = -\frac{0,5}{0} = -\infty$$

Por tanto,

$$I = 0,5 \text{ A} \quad ; \quad \arctan \theta = -\pi/2$$